Elementare Herleitung der Dirac-Gleichung

Hans Sallhofer

Forschungsabt. der Firma Sallhofer & Co., Rohrwerk, Braunau *

Z. Naturforsch. **33a**, 1378–1379 (1978); eingegangen am 27. September 1978

Elementary Derivation of the Dirac Equation

As is well known, the Schrödinger equation can be derived by suitably arranging the refraction in the classical equation for light inhomogeneous media. In this paper it is shown that one may derive the Dirac equation in complete analogy by arranging for the refraction in the electrodynamics of inhomogeneous media.

Bei der Herleitung der Schrödinger-Gleichung wird üblicherweise ausgegangen von der klassischen Lichtgleichung für inhomogene Medien:

$$[\Delta - (1/c^2)\, N^2\, \partial^2/\partial t^2]\, \Psi = 0\,. \tag{1}$$

Streng genommen [1] müßte ausgegangen werden von der Elektrodynamik für inhomogene Medien, die in zweiter Ordnung bekanntlich lautet:

$$\left.\begin{aligned} &[\Delta - (1/c^2)\,\varepsilon\,\mu\,\partial^2/\partial t^2 - \operatorname{grad}\operatorname{div} \\ &\quad - (1/\mu)\operatorname{grad}\mu \times \operatorname{rot}]\,\boldsymbol{E} = 0\,, \\ &[\Delta - (1/c^2)\,\varepsilon\,\mu\,\partial^2/\partial t^2 - \operatorname{grad}\operatorname{div} \\ &\quad - (1/\varepsilon)\operatorname{grad}\varepsilon \times \operatorname{rot}]\,\boldsymbol{H} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Um von (2) zur Ausgangsgleichung (1) gelangen zu können, müssen in (2) zunächst die Exprodukte vernachlässigt werden. Sodann muß die Quellenfreiheit der beiden Feldvektoren gefordert werden:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0\,. \tag{3}$$

Mit der abschließenden Vereinfachung $\varepsilon = \mu = N$ folgt endlich für alle Komponenten der beiden Feldvektoren die Ausgangsgleichung (1).

Um nun die Dirac-Gleichung elementar und analog zu Schrödinger herzuleiten, werde ausgegangen von der nicht kovarianten Elektrodynamik für inhomogene Medien:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{E}}/c\,, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\,\mu\,\dot{\boldsymbol{H}}/c\,, \\ &\operatorname{div}\varepsilon\,\boldsymbol{E} = 0\,, \qquad \operatorname{div}\mu\,\boldsymbol{H} = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Sodann werde — genau analog zu Schrödinger — die Forderung (3) hinzugenommen, so daß die Lösungsmenge von (4) auf die Menge der quellenfreien Lösungen eingeschränkt wird. Mit (3) reduzieren sich die dritte und vierte Gleichung von (4) auf Normalstand-Bedingungen. Diese Bedingungen sind aber (bis auf eine unbedeutende Integrationskonstante) schon in der ersten und zweiten Gleichung von (4) enthalten, wie eine Divergenzbildung sofort zeigt. Die dritte und vierte Gleichung von (4) können daher entfallen. Es verbleibt das System:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \varepsilon\,\dot{\boldsymbol{E}}/c\,, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\,\mu\,\dot{\boldsymbol{H}}/c\,, \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0\,, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Die acht Gln. (5) lassen sich wie folgt kombinieren:

$$\begin{aligned} &i\,(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})_3 - i\,\varepsilon\,\dot{E}_3/c + \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0 \\ &i\,(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})_1 - i\,\varepsilon\,\dot{E}_1/c - (\operatorname{rot}\boldsymbol{H})_2 + \varepsilon\,\dot{E}_2/c = 0\,, \\ &i\operatorname{div}\boldsymbol{E} - (\operatorname{rot}\boldsymbol{E})_3 - \mu\,\dot{H}_3/c = 0\,, \\ &i\,(\operatorname{rot}\boldsymbol{E})_2 + i\,\mu\,\dot{H}_2/c + (\operatorname{rot}\boldsymbol{E})_1 + \mu\,\dot{H}_1/c = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Bringt man hier die Substitution [2]

$$\begin{aligned} &\Psi_1 = i\,E_3\,, \quad \Psi_2 = i\,(E_1 + i\,E_2)\,, \\ &\Psi_3 = H_3\,, \quad \Psi_4 = H_1 + i\,H_2 \end{aligned} \tag{7}$$

ein, so kommt das System

$$(\partial\gamma)_{ik}\,\Psi_k = 0\,, \quad \partial_4 = (1/c)\,\partial/\partial t\,, \tag{8}$$

$$\gamma_{ik}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ik}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{ik}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ik}^{(4)} = -\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Separiert man hier die Zeitfunktion in der üblichen Weise durch den Ansatz

$$\Psi_k = \psi_k \exp(-\,i\,\omega\,t)\,, \tag{9}$$

so kommt für die Amplituden:

$$((\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\gamma})_{ik} - i\,\omega\,\gamma_{ik}^{(4)}/c)\,\psi_k = 0\,. \tag{10}$$

Vergleicht man (10) mit der Dirac-Amplitudengleichung

$$[(\boldsymbol{\nabla}\overline{\boldsymbol{\gamma}})_{ik} + i\,\overline{\gamma}_{ik}^{(4)}/(\hbar\,c)]\,\psi_k = 0\,, \quad \overline{\gamma}_{ik}^{(j)} = \gamma_{ik}^{(j)} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, 3\,,$$

$$\overline{\gamma}_{ik}^{(4)} = \begin{pmatrix} \hbar\,\omega - \Phi + m\,c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\,\omega - \Phi + m\,c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\,\omega - \Phi - m\,c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar\,\omega - \Phi - m\,c^2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

* Bahnhofstraße 36, A-5280 Braunau am Inn, Österreich.
Sonderdruckanforderungen an Dr. Hans Sallhofer, 12, Fischerstrasse, A-5280 Braunau, Österreich.

so sieht man, daß beide Systeme strukturell übereinstimmen. Sie werden identisch, wenn man über die Brechung wie folgt verfügt:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - (\Phi - m\,c^2)/(\hbar\,\omega)\,, \\ \mu &= 1 - (\Phi + m\,c^2)/(\hbar\,\omega)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Die bekannten Lösungen

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) \tag{13}$$

können wie bei Schrödinger bzw. Dirac mit Hilfe des Ausdrucks

$$\boldsymbol{\Psi}\overset{*}{\boldsymbol{\Psi}} = \Psi_i\,\overset{*}{\Psi}_i \tag{14}$$

im Sinne der Wahrscheinlichkeitsinterpretation gedeutet werden. Da die Theorie (8) aufgrund ihrer Herleitung aus dem nichtrelativistischen System (4) bzw. (5) dem Kritikanspruch der speziellen Relativitätstheorie entzogen erscheint, vermeidet sie die für die Dirac-Theorie bezeichnende Vereinbarungsschwierigkeit zwischen Quanten und Relativität.

[1] C. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, 3. Band, 2. Teil, 2. Auflage, Seite 252 (Fußnote), Walter de Gruyter & Co., Berlin 1951.

[2] Die Substitution (7) — oder ähnliche Substitutionen — wurden bereits von C.G. Darwin (Proc. Roy. Soc. **118**, 654 (1928)) zur Herstellung eines Zusammenhangs zwischen der Elektrodynamik und der Dirac-Gleichung des masse- und kräftefreien Falls ($m = 0$, $\Phi = 0$) und von Glaser (Z. Phys. **139**, 276 (1954)) zur Herstellung eines Zusammenhangs zwischen der Elektrodynamik und der Dirac-Gleichung des kräftefreien Falls ($m \neq 0$, $\Phi = 0$) verwendet.